小摂動項の及ぼす解の到達時間差の評価 (関数方程式論におけるモデリングと複素解析)

AUTHOR(S):
上之郷, 高志

CITATION:
上之郷, 高志. 小摂動項の及ぼす解の到達時間差の評価 (関数方程式論におけるモデリングと複素解析). 数理解析研究所講究録 2008, 1582: 80-86

ISSUE DATE:
2008-02

URL:
http://hdl.handle.net/2433/81452

数理解析研究所講究録
第 1582 巻 2008 年 80-86

小摂動項の及ぼす解の到達時間差の評価

東北学院大学教養学部 上之郷高志（Takashi Kaminogo）
Department of Mathematics,
Tohoku Gakuin University

初期値問題

(1) $$\frac{du}{dt} = \varphi(u), \quad u(0) = 0$$

(2) $$\frac{du}{dt} = \varphi(u) + s(t), \quad u(0) = 0$$

を考える．ただし，u, $t \in \mathbf{R}$ とし，$s : [0, \infty) \to \mathbf{R}$ は連続で $\varphi : [0, C] \to \mathbf{R}$（$C > 0$ は定数）は連続微分可能とする．次を仮定する．

(A) $$\exists h > 0,\ \varphi(u) \geq h,\ \varphi(u) + s(t) \geq h \qquad (0 \leq u \leq C,\ t \geq 0).$$

(1) の解 $u_0(t)$ が C に到達する時刻を T_0 とし，(2) の解 $u(t)$ が C に到達する時刻を T とするとき，$T_1 := T - T_0$ の値を $s(t)$ を用いて評価したい．Knight [1] は $\varphi(u) = -\gamma u + s_0$（$s_0$ は正の定数）の場合に，$|s(t)|$ と $|\gamma|$ が十分小のとき，

$$-T_1 \approx e^{\gamma T_0} \int_{T-T_0}^{T} e^{-\gamma(T-t)} \frac{s(t)}{s_0}\, dt$$

であることを示した．

上述の問題に対して次の結果が得られた。

定理 仮定 (A) のもとで，(2) の解を $u(t)$ とし，T_0, T, T_1 を上記のように定める．このとき，

$$-T_1 = \int_0^T \frac{s(t)}{\varphi(u(t))}\, dt$$

が成り立つ．

これを示すために，まず $\varphi(u)$ を折れ線で近似する．u の区間 $[0, C]$ を n 等分し，分点を C_k とする．すなわち，

$$C_k = \frac{kC}{n} \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

とする．$n+1$ 個の点 $(C_0, \varphi(C_0))$, $(C_1, \varphi(C_1))$, $\cdots$,$(C_n,\ \varphi(C_n))$ を折れ線で結んだ関数を $\varphi_n(u)$ とすると，

$$\varphi_n : [0, C] \to \mathbf{R}$$

は，区間 $[C_{k-1}, C_k]$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ 上で

$$\varphi_n(u) = k\varphi(C_{k-1}) - (k-1)\varphi(C_k) + \frac{n}{C}\{\varphi(C_k) - \varphi(C_{k-1})\}\, u$$

と表される．φ_n の作り方から，φ_n は，(A) で φ を φ_n に置き換えた条件を満たしていることが容易にわかる．

(1), (2) をそれぞれ次の微分方程式で近似する．

$(1)_n$
$$\frac{du}{dt} = \varphi_n(u), \quad u(0) = 0,$$

$(2)_n$
$$\frac{du}{dt} = \varphi_n(u) + s(t), \quad u(0) = 0.$$

補題 $h > 0$, $0 \le K < L \le C$, $\lambda \ge 0$ とし，定数 a, b は不等式

(3)
$$a + bu \ge h, \quad a + bu + s(t) \ge h \qquad (K \le u \le L,\ t \ge \lambda)$$

を満たしているとする．初期値問題

(4)
$$\frac{du}{dt} = a + bu, \quad u(\lambda) = K$$

の解 $u_0(t)$ に対し，$u_0(t) = L$ となる t を η とし，$R_0 = \eta - \lambda$ とおく。また初期値問題

(5)
$$\frac{du}{dt} = a + bu + s(t), \quad u(\lambda) = K$$

の解 $u(t)$ に対し，$u(t) = L$ となる t を σ とし，$R = \sigma - \lambda$, $R_1 = R - R_0$ とおく．このとき，

(6)
$$|R_1| < \max\{R_0,\ R\} \le \frac{L-K}{h},$$

(7)
$$-R_1 = \int_\lambda^\sigma e^{b(\sigma-\tau)} \frac{s(\tau)}{a+bL}\, d\tau + bR_1^2\, \Phi(bR_1)$$

が成り立つ．ただし，$\Phi(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{n!} = \frac{1}{2!} + \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{4!} + \frac{x^3}{5!} + \cdots$ である．

証明 (3) より，$0 < R_0 \le (L-K)/h$, $0 < R \le (L-K)/h$ は明らかに成り立つ．また，$R \ge R_0$ のとき，$0 \le R_1 = R - R_0 < R$ であり，$R < R_0$ のとき $0 < -R_1 = R_0 - R < R_0$ である．よって (6) が示せた．

次に (7) を示す．まず $b \ne 0$ の場合を考える．初期値問題 (5) の解 $u(t)$ は

$$u(t) = Ke^{b(t-\lambda)} + \int_\lambda^t e^{b(t-\tau)}\{a + s(\tau)\}\, d\tau$$

で表される．$u(\sigma) = L$ であるから，上式より

$$\begin{aligned} L &= Ke^{b(\sigma-\lambda)} + \int_\lambda^\sigma e^{b(\sigma-\tau)}\{a + s(\tau)\}\, d\tau \\ &= Ke^{bR} + a\int_\lambda^\sigma e^{b(\sigma-\tau)}\, d\tau + \int_\lambda^\sigma e^{b(\sigma-\tau)} s(\tau)\, d\tau \\ &= Ke^{bR} - \frac{a}{b} + \frac{a}{b}e^{bR} + \int_\lambda^\sigma e^{b(\sigma-\tau)} s(\tau)\, d\tau \end{aligned}$$

が得られる．整理すると

$$a + bL = (a + bK)e^{bR} + b\int_\lambda^\sigma e^{b(\sigma-\tau)} s(\tau)\, d\tau \tag{8}$$

となる．ここで $s(t) \equiv 0$ とすると，(5) は (4) になり，また $R = R_0$ となるから (8) より，

$$a + bL = (a + bK)e^{bR_0}$$

が得られる．これを　$a + bK = (a + bL)e^{-bR_0}$ と変形して (8) に代入すると

$$\left\{1 - e^{b(R-R_0)}\right\}(a + bL) = b\int_\lambda^\sigma e^{b(\sigma-\tau)} s(\tau)\, d\tau$$

となる．さらに，$R - R_0 = R_1$ を代入すると，

$$\frac{1 - e^{bR_1}}{b} = \int_\lambda^\sigma e^{b(\sigma-\tau)} \frac{s(\tau)}{a + bL}\, d\tau \tag{9}$$

が成り立つ．一方，

$$\begin{aligned} \frac{1 - e^{bR_1}}{b} &= \frac{1}{b}\left\{1 - \left(1 + bR_1 + \frac{b^2R_1^2}{2!} + \frac{b^3R_1^3}{3!} + \cdots + \frac{b^nR_1^n}{n!} + \cdots\right)\right\} \\ &= -R_1 - \left(\frac{bR_1^2}{2!} + \frac{b^2R_1^3}{3!} + \cdots + \frac{b^{n-1}R_1^n}{n!} + \cdots\right) \\ &= -R_1 - bR_1^2\left(\frac{1}{2!} + \frac{bR_1}{3!} + \cdots + \frac{b^{n-2}R_1^{n-2}}{n!} + \cdots\right) \\ &= -R_1 - bR_1^2\,\Phi(bR_1) \end{aligned}$$

であるから，これを (9) に代入すると (7) が得られる．

$b=0$ の場合は，初期値問題 (5) の解 $u(t)$ は

$$u(t)=K+\int_\lambda^t\{a+s(\tau)\}\,d\tau=K+a(t-\lambda)+\int_\lambda^t s(\tau)\,d\tau$$

で与えられるから，$t=\sigma$ とおき $\sigma-\lambda=R$ を代入すると，

$$L=K+aR+\int_\lambda^\sigma s(\tau)\,d\tau$$

が得られる．また，$s(t)\equiv 0$ のとき $R=R_0$ であるから上式より，$L=K+aR_0$ となる．これを上式 に代入すると

$$K+aR_0=K+aR+\int_\lambda^\sigma s(\tau)\,d\tau$$

となる．これを $R-R_0$ について解き，$R-R_0=R_1$ とおくと

$$-R_1=\int_\lambda^\sigma \frac{s(\tau)}{a}\,d\tau$$

が従う．これは (7) で $b=0$ とおいたものである． □

注意 1 補題の証明に見られるように，R_0 は a, b, K, L だけに依存し，初期時刻 λ に無関係に定まる．このことは (4) が自励系であることからも明らかである．

定理の証明 任意の $n\in\mathbf{N}$ を1つとり固定する。$(1)_n$ の解 $u_0(t)$ に対し，$u_0(t)=C$ となる t を T_0 とする．次に $k=0,1,2,\cdots n$ に対し，$u_0(t)=C_k$ を満たす t を μ_k とする．すなわち，

$$u_0(\mu_k)=C_k$$

で μ_k を定める．また，$(2)_n$ の解 $u(t)$ に対し，$u(t)=C$ となる t を T とする．また，$k=0,1,2,\cdots n$ に対し，$u(t)=C_k$ を満たす t を σ_k とする．すなわち，

$$u(\sigma_k)=C_k$$

で σ_k を定める． $0=\mu_0<\mu_1<\cdots<\mu_n=T_0$，$0=\sigma_0<\sigma_1<\cdots<\sigma_n=T$ が成り立っている．$T_1=T-T_0$ とおき，$R_0^{(k)}$，$R^{(k)}$，$R_1^{(k)}$ をそれぞれ

$$R_0^{(k)}=\mu_k-\mu_{k-1},\quad R^{(k)}=\sigma_k-\sigma_{k-1},\quad R_1^{(k)}=R^{(k)}-R_0^{(k)}\quad (k=0,1,2,\cdots,n)$$

で定めると，

$$T_0=\sum_{k=1}^n R_0^{(k)},\quad T=\sum_{k=1}^n R^{(k)},\quad T_1=\sum_{k=1}^n R_1^{(k)}$$

が成り立つ．

次に初期値問題

$$\frac{du}{dt} = \varphi_n(u), \quad u(\sigma_{k-1}) = C_{k-1}$$

を $C_{k-1} \leq u \leq C_k$ で考え，解 $u^*(t)$ に対し，$u^*(t) = C_k$ となる t を ρ_k とする．注意 1 より等式

$$R_0^{(k)} = \mu_k - \mu_{k-1} = \rho_k - \sigma_{k-1}$$

が成り立つ．ここで，$K = C_{k-1}$，$L = C_k$，$\lambda = \sigma_{k-1}$ とし，

$$a = k\varphi(C_{k-1}) - (k-1)\varphi(C_k), \quad b = \frac{n}{C}\{\varphi(C_k) - \varphi(C_{k-1})\}$$

とおいて補題を適用する．$a + bu = \varphi_n(u), a + bL = \varphi(C_k)$ であるから，(6) より

(10)
$$|R_1^{(k)}| < \max\left\{R_0^{(k)},\, R^{(k)}\right\} \leq \frac{C_k - C_{k-1}}{h} = \frac{C}{hn}$$

が成り立つ．さらに，平均値の定理より

$$b = \frac{n}{C}\{\varphi(C_k) - \varphi(C_{k-1})\} = \frac{\varphi(C_k) - \varphi(C_{k-1})}{C_k - C_{k-1}} = \dot{\varphi}(B_k)$$

を満たす $B_k \in (C_{k-1}, C_k)$ が存在する．ただし，$\dot{\varphi} = d\varphi/du$ である．よって (7) から

(11)
$$-R_1^{(k)} = \int_{\sigma_{k-1}}^{\sigma_k} e^{\dot{\varphi}(B_k)(\sigma_k - \tau)} \frac{s(\tau)}{\varphi(C_k)}\, d\tau + \dot{\varphi}(B_k)\left(R_1^{(k)}\right)^2 \Phi\left(\dot{\varphi}(B_k) R_1^{(k)}\right)$$

が従う．右辺の第 1 項は，積分の平均値の定理を用いて次のように書き換えられる．すなわち，適当な $\tau_k \in (\sigma_{k-1}, \sigma_k)$ をとると，

(12)
$$\int_{\sigma_{k-1}}^{\sigma_k} e^{\dot{\varphi}(B_k)(\sigma_k - \tau)} \frac{s(\tau)}{\varphi(C_k)}\, d\tau = e^{\dot{\varphi}(B_k)(\sigma_k - \tau_k)} \frac{s(\tau_k)}{\varphi(C_k)} (\sigma_k - \sigma_{k-1})$$

となる．また，$B_k \in (C_{k-1}, C_k) = (u(\sigma_{k-1}), u(\sigma_k))$ より $B_k = u(\xi_k)$ を満たす $\xi_k \in (\sigma_{k-1}, \sigma_k)$ が存在する．さらに，$C_k = u(\sigma_k)$ であるから，これらを (12) の右辺 に代入し，さらに (12) を (11) に代入すると，

(13)
$$-R_1^{(k)} = e^{\dot{\varphi}(u(\xi_k))(\sigma_k - \tau_k)} \frac{s(\tau_k)}{\varphi(u(\sigma_k))} (\sigma_k - \sigma_{k-1})$$
$$+ \dot{\varphi}(B_k)\left(R_1^{(k)}\right)^2 \Phi\left(\dot{\varphi}(B_k) R_1^{(k)}\right)$$

が得られる．(13) の左辺を k について加えると，

$$\sum_{k=1}^{n}\left(-R_1^{(k)}\right) = -T_1$$

である．ここで，u，T_0，T，T_1，σ_k，τ_k，ξ_k は n によって決まるから，これらをそれぞ

れ u_n, T_0^n, T^n, T_1^n, $\sigma_k^n, \tau_k^n, \xi_k^n$ とかくと,

$$-T_1^n = \sum_{k=1}^{n} e^{\dot{\varphi}(u_n(\xi_k^n))(\sigma_k^n - \tau_k^n)} \frac{s(\tau_k^n)}{\varphi(u_n(\sigma_k^n))}(\sigma_k^n - \sigma_{k-1}^n)$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \dot{\varphi}(B_k) \left(R_1^{(k)}\right)^2 \Phi\left(\dot{\varphi}(B_k) R_1^{(k)}\right)$$

と表される. また, $n \to \infty$ のとき, $T_0^n \to T_0$, $T^n \to T$, $T_1^n \to T_1$ であり, $\{u_n(t)\}$ は区間 $[0, T)$ で $u(t)$ に広義一様収束する. ただし, T_0, T, T_1, u は定理の仮定で与えられたものとする. さらに $n \to \infty$ のとき, (10) より $\max_{1 \le k \le n}(\sigma_k^n - \sigma_{k-1}^n) = \max_{1 \le k \le n} R^{(k)} \to 0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} e^{\dot{\varphi}(u_n(\xi_k^n))(\sigma_k^n - \tau_k^n)} \frac{s(\tau_k^n)}{\varphi(u_n(\sigma_k^n))}(\sigma_k^n - \sigma_{k-1}^n)$$

$$= \int_0^T e^{\dot{\varphi}(u(t))(t-t)} \frac{s(t)}{\varphi(u(t))}\, dt = \int_0^T \frac{s(t)}{\varphi(u(t))}\, dt$$

となる. 次に (13) の右辺の第 2 項について考察する.

$$|\Phi(x)| \le \frac{1}{2!} + \frac{|x|}{3!} + \frac{|x|^2}{4!} + \frac{|x|^3}{5!} + \cdots < 1 + \frac{|x|}{1!} + \frac{|x|^2}{2!} + \frac{|x|^3}{3!} + \cdots = e^{|x|}$$

であるから, $M = \sup\{|\dot{\varphi}(u)|;\, 0 \le u \le C\}$ とすると, (10) より (13) の右辺の第 2 項は次の不等式を満たす.

$$\left|\dot{\varphi}(B_k) \left(R_1^{(k)}\right)^2 \Phi\left(\dot{\varphi}(B_k) R_1^{(k)}\right)\right| \le M \left|R_1^{(k)}\right|^2 e^{M|R_1^{(k)}|} \le \frac{MC^2}{h^2 n^2} e^{MC/hn}.$$

したがって, $n \to \infty$ のとき

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \dot{\varphi}(B_k) \left(R_1^{(k)}\right)^2 \Phi\left(\dot{\varphi}(B_k) R_1^{(k)}\right)\right| \le \sum_{k=1}^{n} \frac{MC^2}{h^2 n^2} e^{MC/hn} = \frac{MC^2}{h^2 n} e^{MC/hn} \to 0$$

である. 以上より結論の等式が得られる. □

系 $\varphi(u) = -\gamma u + s_0$ のとき,

$$-T_1 \approx e^{\gamma T_0} \int_{T-T_0}^{T} e^{-\gamma(T-t)} \frac{s(t)}{s_0}\, dt$$

が成り立つ ([1] 参照). ただし, s_0 は正の定数とし, $|\gamma|$ と $|s(t)|$ は十分小とする.

証明 $du/dt = -\gamma u + s_0 + s(t)$, $u(0) = 0$ の解 $u(t)$ は

$$u(t) = \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)}\{s_0 + s(\tau)\}\,d\tau$$

$$= \frac{s_0}{\gamma}\left\{1 - e^{-\gamma t}\right\} + \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} s(\tau)\,d\tau$$

で与えられる．分母を払って変形し，$\gamma s(t)$ が十分 0 に近いことを用いると

$$-\gamma u(t) + s_0 = s_0 e^{-\gamma t} - \gamma \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} s(\tau)\,d\tau \approx s_0 e^{-\gamma t}$$

が得られる．よって，定理と上式および $0 = T - T_0 - T_1$ より

$$-T_1 = \int_0^T \frac{s(t)}{-\gamma u(t) + s_0}\,dt \approx \int_0^T \frac{s(t)}{s_0 e^{-\gamma t}}\,dt = \int_0^T e^{\gamma t}\frac{s(t)}{s_0}\,dt$$

$$= e^{\gamma T}\int_0^T e^{-\gamma(T-t)}\frac{s(t)}{s_0}\,dt = e^{\gamma(T_0+T_1)}\int_{T-T_0-T_1}^T e^{-\gamma(T-t)}\frac{s(t)}{s_0}\,dt$$

となる．また，$\gamma T_1 \approx 0$ より $e^{\gamma(T_0+T_1)} \approx e^{\gamma T_0}$ が成り立ち，さらに $|T_1|$ と $|s(t)|$ がともに 0 に近いことから

$$\int_{T-T_0-T_1}^T e^{-\gamma(T-t)}\frac{s(t)}{s_0}\,dt \approx \int_{T-T_0}^T e^{-\gamma(T-t)}\frac{s(t)}{s_0}\,dt$$

が成り立つ．以上より結論が従う． □

REFERENCES

[1] Knight, B. W., Dynamics of encoding in a population of neurons, J. General Physiology 59,1972, 734-766.